

Новое семейство ортогональных вейвлетов на основе атомарных функций $ch_{a,n}$

Я.Ю. Коновалов¹, В.Ф. Кравченко^{1,2,3}, О.В. Кравченко^{1,2,3},
Д.В. Чуриков^{2,3,4}

kon20002000@mail.ru, kvf-ok@mai.ru, olekravchenko@gmail.com,
mpio_nice@mail.ru

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана¹
Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН²
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН³
Московский физико-технический институт⁴

21 сентября 2015

- 1 Общая конструкция вейвлетов Кравченко
- 2 Новое семейство атомарных функций $ch_{a,n}(x)$
- 3 Построение $\chi(\omega)$
- 4 Построение вейвлетов
- 5 Константы неопределенности

Конструкция вейвлетов Кравченко, впервые изложенная в работах **В.Ф. Кравченко, А.В. Юрин. Новый класс вейвлет-функций в цифровой обработке сигналов и изображений. Успехи современной радиоэлектроники. № 5, 2008. с. 3-64.**

В.Ф. Кравченко, Д.В. Чуриков. Атомарные функции $h_a(x)$ и новые ортогональные вейвлеты на их основе. Успехи современной радиоэлектроники. № 6, 2008. с.67-85.

является обобщением конструкции вейвлетов Мейера и основана на теоремах кратномасштабного анализа.

Кратномасштабный анализ (КМА) – это система замкнутых вложенных подпространств $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

① $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$

② $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

③ $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$

④ \exists масштабирующая функция $\varphi(x) \in V_0$ сдвиги которой образуют в V_0 базис Рисса.

Теорема 1

Сдвиги функции $\{\varphi(x - n)\}$ образуют базис Рисса в подпространстве $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существуют положительные постоянные A и B такие что

$$A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 \leq B.$$

Теорема 2

Функции $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ образуют ортонормированный базис подпространства $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда

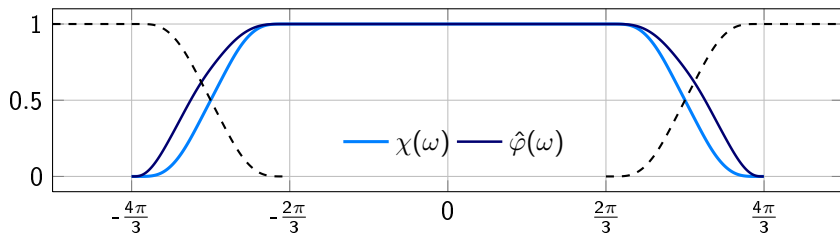
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1$$

почти всюду.

Общая конструкция ортогональных вейвлетов Кравченко

Чтобы получить $\hat{\varphi}(\omega)$, удовлетворяющую условию *Теоремы 2* сначала построим функцию $\chi(\omega) = |\hat{\varphi}(\omega)|^2$ со следующими свойствами:

- 1 $\chi(\omega) = \chi(-\omega)$,
- 2 $\text{supp}(\chi(\omega)) = [-\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$,
- 3 $\chi(\omega) = 1$ if $\omega \in [-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$,
- 4 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(\omega + 2\pi n) = 1$.



Вид графиков функций $\chi(\omega)$ и $\hat{\varphi}(\omega)$

Согласно *Теореме 2* $\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{\chi(\omega)}$ порождает КМА.

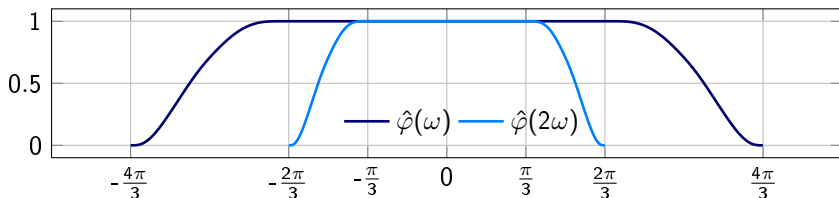
Масштабирующее уравнение

$$\hat{\varphi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

позволяет получить функцию сопряженного зеркального фильтра $H_0(\omega)$ в виде

$$H_0(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)} = \hat{\varphi}(2\omega)$$

последнее имеет место так как $\hat{\varphi}(\omega) = 1$ на всем носителе $\hat{\varphi}(2\omega)$.



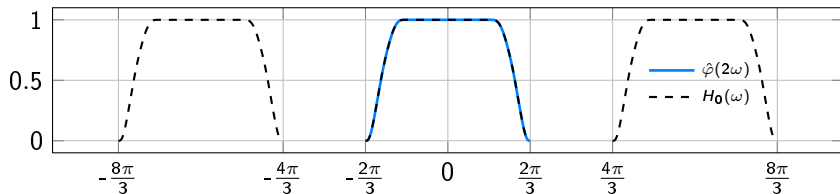
Теорема 3

Если сдвиги $\varphi_n(x) = \varphi(x - n)$ масштабирующей функции $\varphi(x)$ образуют ортонормированный базис пространства $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ то частотная функция $H_0(\omega)$ обладает свойством:

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1.$$

Периодически продолжим $H_0(\omega)$ с периодом 2π

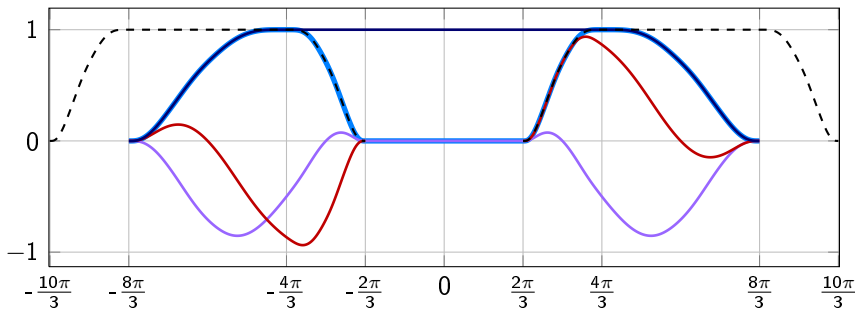
$$H_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2(\omega + 2\pi n)).$$



Общая конструкция ортогональных вейвлетов Кравченко

Преобразование Фурье вейвлета может быть найдено по формуле

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{\frac{i\omega}{2}} \overline{H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{\frac{i\omega}{2}} (\hat{\varphi}(\omega - 2\pi) + \hat{\varphi}(\omega + 2\pi)) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$



— $|\hat{\psi}(\omega)|$ — $\text{Re} \hat{\psi}(\omega)$ — $\text{Im} \hat{\psi}(\omega)$ — $\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ - - - $H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)$

Описанная методика позволяет строить разные вейвлеты в зависимости от выбора $\chi(\omega)$ и, соответственно $\hat{\varphi}(\omega)$.

Для построения вейвлетов Мейера используются конструкции на базе тригонометрических полиномов специального вида.

Для построения вейвлетов Кравченко в качестве $\chi(\omega)$ рассматривались суммы сдвигов **АФ** $\text{up}(x)$, $\text{fup}_n(x)$, $h_a(x)$, $\Xi_n(x)$, $\text{up}_m(x)$, $\pi_m(x)$.

В данной работе в качестве $\chi(\omega)$ рассматриваются суммы сдвигов **АФ** $\text{ch}_{a,n}$.

Определение

АФ $\text{ch}_{a,n}$ – это *финитное решение уравнения*

$$y^{(n)} = a^{n+1} 2^{-n} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k y(ax + n - 2k)$$

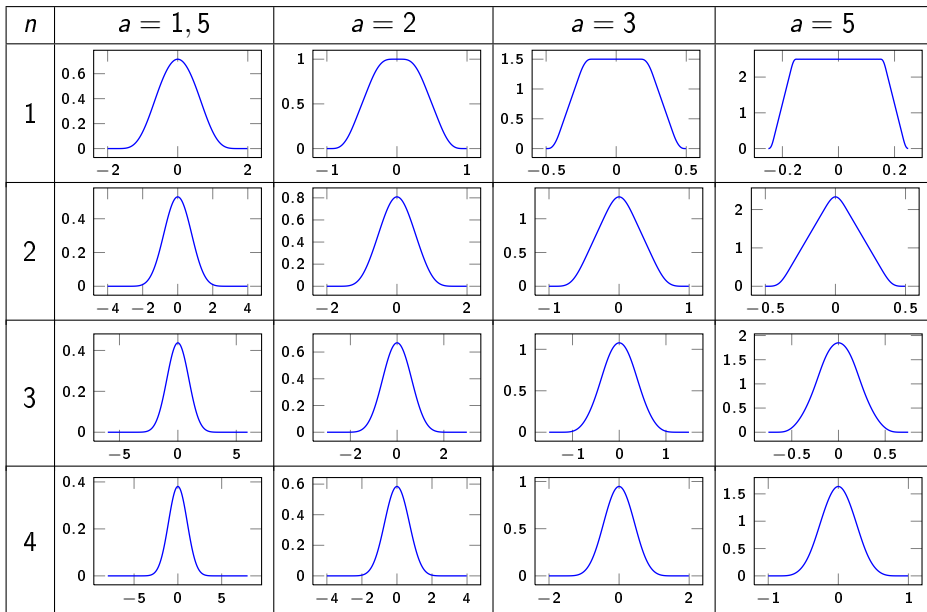
имеющее носитель $\left[-\frac{n}{a-1}, \frac{n}{a-1}\right]$ и охватывающее единичную площадь.

Перечислим некоторые свойства **АФ** $\text{ch}_{a,n}$.

- 1** **АФ** $\text{ch}_{a,n}$ является сверткой n экземпляров **АФ** h_a , а ее спектр есть спектр **АФ** h_a возведенный в степень n

$$\widehat{\text{ch}_{a,n}}(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}^n \left(\frac{t}{a^k} \right) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{t}{a^k} \right) \right)^n = \left(\widehat{h}_a(t) \right)^n.$$

Новое семейство атомарных функций $ch_{a,n}$



- 2 **АФ** $ch_{a,n}$ является обобщением известных **АФ**.

Частные случаи $ch_{a,n} = \underbrace{h_a * \dots * h_a}_n$:

- $ch_{2,1}(x) = \text{up}(x)$,
 - $ch_{2,2}(x) = \text{sup}(x)$,
 - $ch_{a,1}(x) = h_a(x)$,
 - $ch_{n+1,n}(x) = \Xi_n(x)$.
- 3 Для вычисления **АФ** $ch_{a,n}$ можно использовать ряд Фурье :

$$ch_{a,n}(x) = \frac{a-1}{n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{ch_{a,n}} \left(\frac{a-1}{n} \pi k \right) \cos \left(\frac{a-1}{n} \pi k x \right) \right).$$

- 4 **АФ** $\text{ch}_{a,n}$ обеспечивает разложение единицы:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{ch}_{a,n} \left(x + \frac{2}{a}k \right) \equiv \frac{a}{2}.$$

- 5 **АФ** $\text{ch}_{a,n}$ точно представляет многочлены степени не выше n :

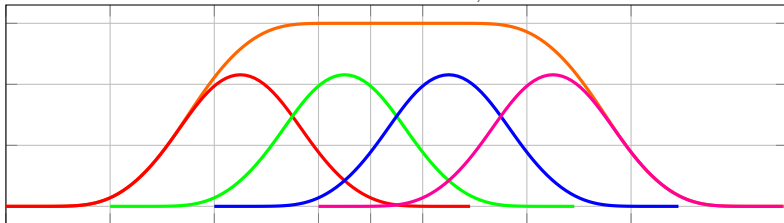
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \text{ch}_{a,n} \left(x + \frac{2}{a}k \right) \equiv P_m(x), \quad m < n$$

вместе с их производными

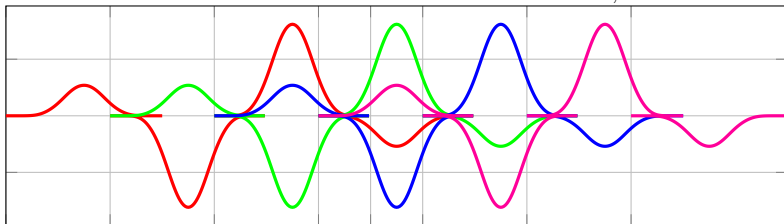
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \text{ch}_{a,n}^{(l)} \left(x + \frac{2}{a}k \right) \equiv P_m^{(l)}(x), \quad l < n.$$

Новое семейство атомарных функций $ch_{a,n}$

Сдвиги $A\Phi$ $ch_{3,3}$

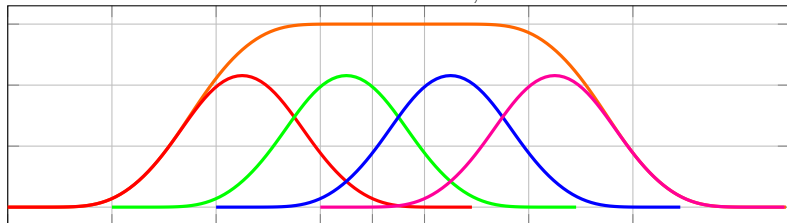


Сдвиги вторых производных $A\Phi$ $ch_{3,3}$

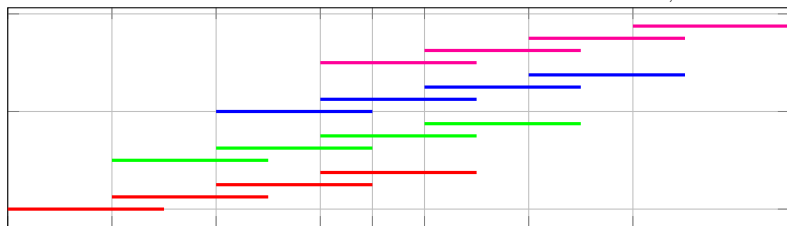


Новое семейство атомарных функций $ch_{a,n}$

Сдвиги **АФ** $ch_{3,3}$



Носители слагаемых 2-й производной **АФ** $ch_{3,3}$



Построение $\chi(\omega)$

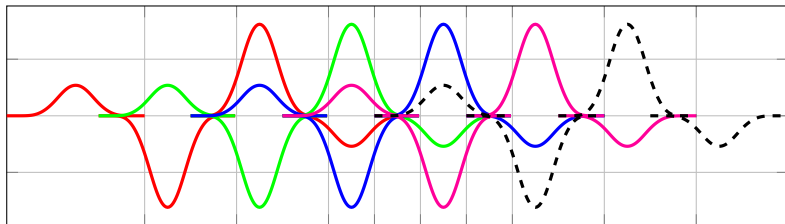
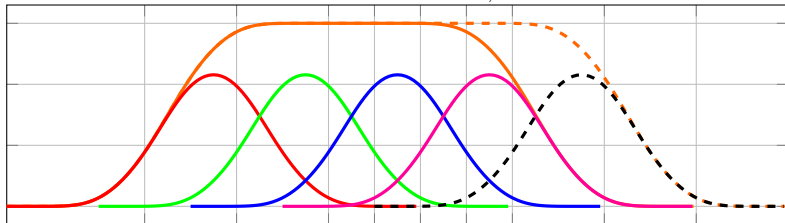
Будем строить $\chi(\omega)$ в виде суммы нескольких последовательных сдвигов $\text{ch}_{a,n}(x)$, используя свойство разложения единицы. Для построения функции сначала подберем a такое, чтобы носитель суммы сдвигов был вдвое длиннее отрезка, на котором она равна 1. Длина носителя суммы $n + r$ сдвигов есть сумма длин носителя $\text{ch}_{a,n}(x)$ $\frac{2n}{a-1}$ и $n + r - 1$ сдвигов на $\frac{2}{a}$. Длина плоской площадки будет равна r сдвигам на $\frac{2}{a}$ плюс разность между длиной сдвига $\frac{2}{a}$ и носителя слагаемого в правой части уравнения $\frac{2n}{a(a-1)}$. Эта разность положительна для функций, у которых носители слагаемых не пересекаются (как у h_a при $a > 2$), отрицательна если есть пересечение носителей и равна нулю для $\Xi_n(x)$.

Требуем длину плоской площадки вдвое меньше длины носителя

$$\frac{2n}{a-1} + \frac{2}{a}(n+r-1) = 2 \left(\frac{2a-2-2n}{a(a-1)} + \frac{2r}{a} \right).$$

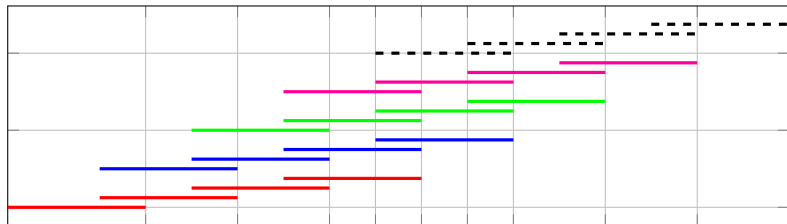
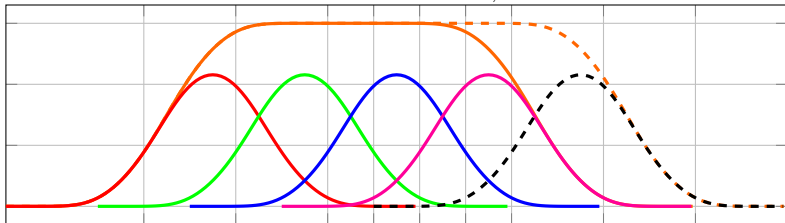
Построение $\chi(\omega)$

Добавление к сумме сдвигов $\Delta\Phi$ $\text{ch}_{3,3}$ одного слагаемого



Построение $\chi(\omega)$

Добавление к сумме сдвигов $\Delta\Phi$ $\text{ch}_{3,3}$ одного слагаемого



Построение $\chi(\omega)$

$$\frac{2n}{a-1} + \frac{2}{a}(n+r-1) = 2 \left(\frac{2a-2-2n}{a(a-1)} + \frac{2r}{a} \right).$$

Раскрыв скобки, получим a в зависимости от r и n

$$a = \frac{r+3+n}{r+3-2n}.$$

Отметим, что $a > 0$ существует только при $r > 2n - 3$. Чтобы привести полученную функцию к требуемому носителю и максимуму, сделаем линейное преобразование аргумента.

$$\chi(\omega) = \frac{2}{a} \cdot \sum_{k=0}^{n+r-1} \text{ch}_{a,n} \left(\frac{3}{4\pi} \left(\frac{n}{a-1} + \frac{n+r-1}{a} \right) \omega + \frac{n+r-1-2k}{a} \right).$$

При $n = 1$ получим вейвлеты, основанные на **АФ** $h_a(x)$.

При $r = 2n$ получим $a = n + 1$ и вейвлеты, основанные на **АФ** $\Xi_n(x)$.

В остальных случаях получаются новые вейвлеты.

Построим вейвлеты на основе полученной $\chi(\omega)$.

Найдем преобразование Фурье масштабирующей функции

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{\chi(\omega)}.$$

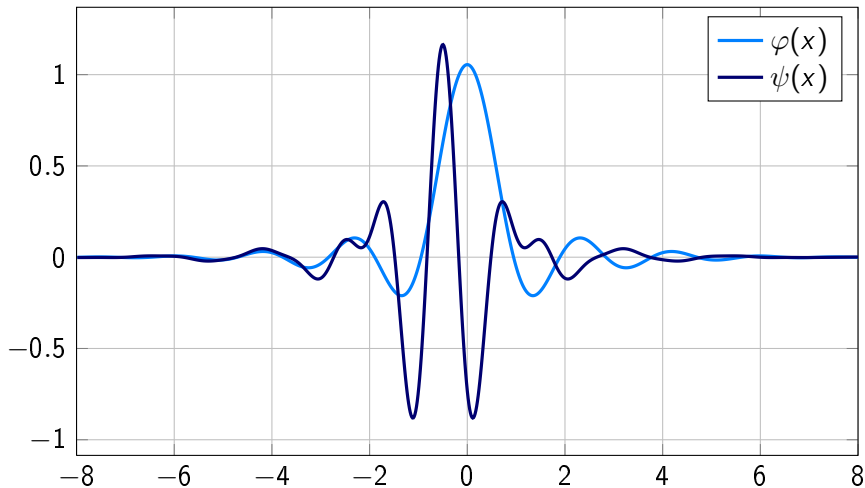
Найдем масштабирующую функцию при помощи обратного преобразования Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \hat{\varphi}(\omega) \cos(\omega x) d\omega.$$

Получим $H_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2(\omega + 2\pi n))$ и

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{\frac{i\omega}{2}} \overline{H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{\frac{i\omega}{2}} (\hat{\varphi}(\omega - 2\pi) + \hat{\varphi}(\omega + 2\pi)) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Построение вейвлетов



Масштабирующая функция и вейвлет

$$n = 3, \quad r = 8, \quad a = 2,8$$

Построение вейвлетов

Интеграл Фурье для вейвлета можно значительно упростить

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\omega}{2}} (\hat{\varphi}(\omega - 2\pi) + \hat{\varphi}(\omega + 2\pi)) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{i\omega x} d\omega.$$

Перемножая экспоненты и учитывая носители сомножителей получим

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{8\pi}{3}} \hat{\varphi}(\omega - 2\pi) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos \omega \left(x + \frac{1}{2}\right) d\omega.$$

Заметим, что $\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$ на отрезке $[-\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$, $\hat{\varphi}(\omega - 2\pi) = 1$ на $[\frac{4\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}]$.

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \hat{\varphi}(\omega - 2\pi) \cos \omega \left(x + \frac{1}{2}\right) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{8\pi}{3}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos \omega \left(x + \frac{1}{2}\right) d\omega.$$

Константы неопределенности

Константы неопределенности широко используются для оценки качества вейвлетов так как они инвариантны относительно сдвига и сжатия функции.

$$\Delta_f = \frac{1}{\|f(t)\|} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_f^*)^2 |f(t)|^2 dt}, \quad t_f^* = \frac{1}{\|f(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt.$$

Относительно вычисления констант неопределенности заметим следующее

$$\|\hat{\varphi}(\omega)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) d\omega = 2\pi$$

так как $\chi(\omega)$ обладает свойством разложения единицы.

Константы неопределенности

Из равенства Парсеваля $\|\hat{\varphi}(\omega)\|^2 = 2\pi \Rightarrow \|\varphi(x)\| = 1$.

Аналогично $\|\hat{\psi}(\omega)\|^2 = 2\pi$ и $\|\psi(x)\| = 1$.

Центры четных функций $\hat{\varphi}(\omega)$ и $\varphi(x)$ находятся в 0.

Центр $\hat{\psi}(\omega)$ также равен 0, так как $|e^{\frac{i\omega}{2}}|^2 = 1$.

Центр вейвлета $\psi(x)$ расположен в $-\frac{1}{2}$, что явно следует из окончательного вида интеграла Фурье.

Коэффициенты фильтров для вычисления ДВП находятся по формуле

$$h_k = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\omega) e^{in\omega} d\omega.$$

Физические характеристики полученных вейвлетов

n	$n=2$				$n=3$			
r	2	3	5	6	4	5	7	8
a	7	4	2,5	2,2	10	5,5	3,25	2,8
k	Коэффициенты фильтра h_k							
0	0,769858	0,76141	0,75177	0,74863	0,760922	0,755517	0,748429	0,74592
1	0,432329	0,436911	0,44122	0,442425	0,43723	0,439681	0,4425	0,443392
2	-0,056945	-0,050251	-0,042171	-0,039452	-0,049594	-0,045242	-0,039245	-0,037055
3	-0,101215	-0,113156	-0,124724	-0,128017	-0,114256	-0,120661	-0,128248	-0,130692
4	0,041736	0,039411	0,035341	0,033732	0,038387	0,036676	0,03351	0,032169
5	0,022234	0,037008	0,05234	0,056874	0,039195	0,047177	0,057272	0,060657
6	-0,022677	-0,025162	-0,025886	-0,025675	-0,023897	-0,025157	-0,025446	-0,025194
7	0,007749	-0,004789	-0,019691	-0,024399	-0,008239	-0,015119	-0,024969	-0,028516
8	0,006016	0,011533	0,015985	0,016994	0,010444	0,013683	0,016778	0,017511
9	-0,014214	-0,007264	0,003906	0,007863	-0,002768	0,001212	0,008594	0,011605
10	0,004046	-0,001636	-0,007574	-0,009276	-0,001202	-0,004724	-0,009102	-0,010445
11	0,0094	0,008514	0,002457	-0,000227	0,003623	0,002826	-0,001087	-0,003139
12	-0,006784	-0,003317	0,001804	0,003566	-0,002846	-0,000529	0,003464	0,004934
13	-0,002014	-0,005179	-0,003637	-0,00227	-0,000773	-0,002102	-0,001336	-0,000317
14	0,004497	0,004053	0,001145	-0,000183	0,002811	0,0023	-0,000171	-0,001361
15	-0,002815	0,001408	0,002564	0,002189	-0,001772	0,000078	0,001245	0,001049
16	-0,000702	-0,002451	-0,00188	-0,001192	-0,000897	-0,001794	-0,001115	-0,000418
Константы неопределенности								
$\Delta_\varphi \Delta_\psi$	0,849832	0,865094	0,924162	0,953627	0,852302	0,889345	0,954349	0,983001
$\Delta_\psi \Delta_\phi$	2,754477	2,804059	2,995344	3,090787	2,762587	2,88256	3,093122	3,185939








Для вейвлета Мейера $\Delta_\varphi \Delta_\psi = 1,01148$; $\Delta_\psi \Delta_\phi = 3,27802$

Физические характеристики полученных вейвлетов

n	$n=4$				$n=5$			
r	6	7	9	10	8	9	11	12
a	13	7	4	3,4	16	8,5	4,75	4
k	Коэффициенты фильтра h_k							
0	0,754485	0,750757	0,745417	0,743409	0,749770	0,747032	0,742866	0,741229
1	0,440116	0,441619	0,44356	0,444225	0,441984	0,442990	0,444394	0,444904
2	-0,044258	-0,041173	-0,036584	-0,034815	-0,040268	-0,037946	-0,034312	-0,032854
3	-0,121929	-0,125911	-0,131175	-0,133008	-0,126947	-0,129649	-0,133489	-0,134903
4	0,035858	0,034409	0,031789	0,030655	0,033743	0,032494	0,030265	0,029289
5	0,04914	0,054266	0,061393	0,063963	0,055800	0,059388	0,064686	0,066691
6	-0,02466	-0,025116	-0,024951	-0,024647	-0,024809	-0,024857	-0,024419	-0,024082
7	-0,017506	-0,022231	-0,029415	-0,03216	-0,023999	-0,027503	-0,033023	-0,035211
8	0,013658	0,015506	0,017428	0,017898	0,015608	0,016692	0,017853	0,018130
9	0,003625	0,006834	0,01256	0,014966	0,008529	0,011193	0,015855	0,017839
10	-0,005228	-0,007496	-0,01052	-0,011503	-0,007963	-0,009504	-0,011627	-0,012340
11	0,000838	-0,000543	-0,004044	-0,005781	-0,001888	-0,003404	-0,006590	-0,008107
12	0,000401	0,002161	0,00514	0,006284	0,002850	0,004243	0,006534	0,007426
13	-0,000904	-0,000911	0,00045	0,00143	-0,000087	0,000431	0,002081	0,003037
14	0,001206	0,00043	-0,001655	-0,002641	-0,000280	-0,001142	-0,002958	-0,003784
15	-0,000189	0,000396	0,000478	0,000131	0,000110	0,000168	-0,000322	-0,000778
16	-0,000861	-0,000977	-0,000089	0,000551	-0,000440	-0,000166	0,000871	0,001469
Константы неопределенности								
$\Delta_{\varphi}\Delta_{\hat{\varphi}}$	0,894133	0,929076	0,989027	1,015345	0,939412	0,969869	1,023381	1,047252
$\Delta_{\psi}\Delta_{\hat{\psi}}$	2,898062	3,011252	3,205461	3,290718	3,044732	3,143397	3,316754	3,394089

Для вейвлета Мейера $\Delta_{\varphi}\Delta_{\hat{\varphi}} = 1,01148$; $\Delta_{\psi}\Delta_{\hat{\psi}} = 3,27802$

Литература

-  Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.
-  Кравченко В.Ф., Коновалов Я.Ю., Пустовойт В.И. Семейства атомарных функций $ch_{a,n}(x)$ и $fur_n(x)$ в цифровой обработке сигналов// Доклады Академии наук. 2015. Т. 462. №1. С. 35–40.
-  Кравченко В.Ф., Юрин А.В. Новый класс вейвлет-функций в цифровой обработке сигналов и изображений// Успехи современной радиоэлектроники. №5, 2008. с. 3-64.
-  Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Атомарные функции $h_a(x)$ и новые ортогональные вейвлеты на их основе// Успехи современной радиоэлектроники. №6, 2008. с.67-85.
-  Кравченко В.Ф., Лабунько О.С., Лерер А.М., Синявский Г.П. Вычислительные методы в современной радиофизике. Под. ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2009.
-  Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.
-  Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. и др. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики// Радиотехника и электроника. Часть I: 2014. Т.59. №10. с.949-978; Часть II: 2015. Т.60. №2. с.109-148; Часть III: 2015. Т.60. №7. с. 663-694; Часть IV: 2015. Т.60. №11. с.1113-1152.

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ
13-02-12065-офи_м «Фундаментальные задачи микроволнового
дистанционного зондирования Земли из космоса»